

UKÁZKA POČETNÍCH PŘÍKLADŮ PRO PRVNÍ ZÁPOČTOVÝ TEST

1. Jsou dána následující lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, B\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, C\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A(B\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)).$$

Dále, máme vektory $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- (a) Spočtete $C(2\vec{u} - \vec{v})$.
- (b) Dokažte, že $X = (\vec{u}, \vec{v})$ je uspořádaná báze $\mathbb{R}^2$ (lze využít faktu, že $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$).
- (c) Nalezněte matici $[C]_{X \rightarrow X}$, tj. matici zobrazení C vůči bázi X . Pokud se Vám ve výpočtech objeví inverzní matice, nemusíte ji dopočítávat.

2. Jsou dána lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, B\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, C\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A(B\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)).$$

- (a) Spočtete maticový součin $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
- (b) Nalezněte $[C]_{E_2 \rightarrow E_2}$, tj. matici zobrazení h vzhledem k bázi E_2 , kde E_2 značí kanonickou bázi $\mathbb{R}^2$.
- (c) Dokažte jakýmkoliv způsobem, že $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ je $[A]_{E_2 \rightarrow X}$, tj. matice zobrazení A vůči bázím E_2 a X , kde $X = (\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix})$.
- (d) Nalezněte souřadnice vektoru $A(\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix})$ vůči bázi X .

3. Jsou dány uspořádané báze $B = (1, x, x^2)$ a $C = (-x, x^2 + 2, x - 1)$ v prostoru $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$.

- (a) Nalezněte matici $T_{C \rightarrow B}$, tj. matici transformace souřadnic z báze C do báze B .
- (b) Ověřte jakýmkoliv způsobem, že $T_{B \rightarrow C}$, tj. matice transformace souřadnic z báze B do báze C , je rovna

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (c) Nalezněte jakýmkoliv způsobem souřadnice polynomu $-x^2 + 2x + 3$ vzhledem k bázi C .

4. Jsou dány množiny $B = (1, x, x^2)$ a $C = (x^2 - 2, x + 3, -2x^2 + 5x)$ v prostoru $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ a lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$,

$$A(ax^2 + bx + c) = (c + b)x^2 + 3ax - b.$$

- (a) Ukažte, že množina C tvoří uspořádanou bázi prostoru $\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ (lze využít faktu, že $\dim(\mathbb{R}^{\leq 2}[x]) = 3$).
- (b) Nalezněte matici $[A]_{C \rightarrow B}$, tj. matici lineárního zobrazení A vůči bázím C a B .

5. Jsou dány matice

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

v prostoru $\text{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Dále, je dáno lineární zobrazení

$$A : \text{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), A\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c-b \end{pmatrix}$$

- (a) Dokažte, že množina $M = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ je uspořádaná báze prostoru $\text{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ (lze využít toho, že $\dim(\text{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)) = 4$).
- (b) Nalezněte matici $[A]_{M \rightarrow X}$, tedy, matici lineárního zobrazení A vůči bázím M a X , kde

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

6. Jsou dány báze

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$
$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

prostoru $\text{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

- (a) Ověřte jakýmkoli způsobem, že matice transformace souřadnic $T_{X \rightarrow Y}$ z báze X do báze Y , je rovna matici

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) Nalezněte souřadnice matice

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

vůči bázi Y .